2. Ndërtimi aksiomatik i i gjeometrisë. Kuptimet themelore dhe grupet e aksiomave

(Përshtatur nga: John M. Lee, *Axiomatic Geometry*, Pure and Applied Undergraduate Texts 21, AMS, 2013.)

Euklidi, i cili jetoi rreth shekullit të tretë p.e.s., mund të konsiderohet si autori më i famshëm në historinë e njerëzimit. Libri i tij, *Elementet*, ka pasur më së shumti ribotime dhe vetëm Bibla e Kurani ia tejkalojnë (qartazi, me një audiencë më të gjerë). *Elementet* ishin botuar në trembëdhjetë vëllime, duke tentuar t'i sistematizon njohuritë e atëhershme të Gjeometrisë.

Sikurse me tekstet e përmendura religjioze, edhe për autorësinë e vërtetë të *Elementeve* ka diskutime të shumta dhe është pothuajse e sigurt se vet Euklidi nuk i shkroi të gjitha ato që më vonë u shndërruan në 13 vëllime.

Përkufizimet (definicionet)

përshkruese:

pika - "ajo që nuk ka pjesë", vija - "gjatësia pa gjerësi", drejtëza - "vija që qëndron barazueshëm me pikat në të", etj. (gjithsej nëntë prej tyre)

logjike:

"kur një drejtëz që qëndron në lidhje me një tjetër drejtëz ashtu që këndet e formuara fqinje janë të barabarta, atëherë secili prej atyre këndeve quhet i drejtë dhe drejtëza që qëndron në lidhje me tjetrën quhet normale ndaj saj", "rrethi...", "trekëndëshi barakrahës...", etj.

Postulatet

Organizimi rigoroz logjik i vërtetimeve. Duhet filluar me disa fakte pa vërtetim:

Postulati i parë i Euklidit: Mund të vizatohet një drejtëz nga një pikë në cilindo pikë.

Postulati i dytë i Euklidit: Mund të prodhohet një drejtëz e fundme (segment) në mënyrë të vazhdueshme në një drejtëz.

Postulati i tretë i Euklidit: Mund të përshkruhet një rreth me çfarëdo qendre dhe çfarëdo distanca.

Postulati i katërt i Euklidit: Të gjitha këndet e drejta janë të barabarta me njëra-tjetrën.

Postulati i pestë i Euklidit: Nëse një drejtëz që qëndron ndaj dy drejtëzave ashtu që këndet e brendshme në anën e njëjtë janë më pak se dy kënde të drejta, atëherë dy drejtëzat, nëse vazhdohen pafundësisht do të takohen në anën në të cilën gjenden dy këndet me shumë më të vogël se dy kënde të drejta.

Tri postulatet e para kanë të bëjnë me *konstruktime* të objekteve (me vizore të pashenjuar e të pafundme dhe me kompas). Dy të fundit kanë të bëjnë me *raporte* ndërmjet objekteve.

Nocione të përgjithshme

(Që po ashtu jepen pa vërtetim. Mbi madhësi.)

1: Gjërat që janë të barabarta me të njëjtën gjë janë të barabarta ndërmjet vete.
2: Nëse të barabartat i shtohen të barabartave, atëherë tërësitë janë të barabarta.
3: Nëse të barabartat i hiqen nga të barabartat, atëherë mbetjet janë të barabarta.
4: Gjërat që janë koincidojnë me njëra-tjetrën janë të barabarta me njëra-tjetrën.
5: E tëra është më e madhe sesa pjesa.

Evitohen numrat. Ndoshta edhe për t'i ikur numrave irracionalë -- qysh para kohës së Euklidit dihej se diagonalja e katrorit me gjatësi 1 është numër irracional. Në *Elemente* jepet vërtetimi i faktit se $\sqrt{2}$ nuk është racional.

Pra, për t'i ikur "mos-ekzistencës" së $\sqrt{2}$, Euklidi krahason madhësi (pa numra), mbledh, zbrit ato si dhe e shqyrton raportin e tyre.

Pohimet

Në gjuhën moderne, ne i quajmë këto *teorema, pohime, rrjedhime, lema.*

Pjesët: 1) Anoncimi , 2) Emërtimi/Konteksti, 3) Specifikimi, 4) Konstruktimi, 5) Vërtetimi, 6) Konkludimi.

Tek konkludimi zakonisht përdoreshin frazat "që duhej bërë" (*quod erat faciendum*) ose "që duhej vërtetuar" (*quod erat demonstrandum*), që përdorej për teoremat. Është interesant që ato fraza kanë mbetur ende në zhargonin e matematikës moderne.

Pas Euklidit

Elementet u shndërrua në tekst standard.

Çështja e postulatit të pestë: Disa besojnë se edhe vet Euklidi nuk e parapëlqente aq shumë atë postulat, sepse nuk e përdori deri në Pohimin I.29, edhe pse mund ta përdorte më herët për t'i thjeshtuar dukshëm disa vërtetime.

Shumë matematikanë provuan të vërtetojnë se postulati i pestë rrjedh nga të tjerat ose tentuan ta zëvendësojnë atë me ndonjë postulat më të vetkuptueshëm. Këto përpjekje e shënojnë zhvillimin e gjeometrisë dhe matematikës për një kohë të gjatë.

Giovanni Saccheri (1667-1733) - supozoi se postulati i pestë ishte i pavërtetë dhe pastaj nxori disa konkluzione (që tash e dimë se i takojnë gjeometrisë jo-euklidiane).

John Playfair (1748-1819) - e zëvendësoi postulatin e pestë me atë që e përdorim më shpesh në kohërat moderne: "Dy drejtëza nuk mund të vizatohet nëpër të njëjtën pikë, paralele me të njëjtën drejtëz, pa koinciduar me njëra-tjetrën."

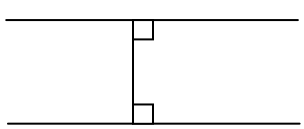
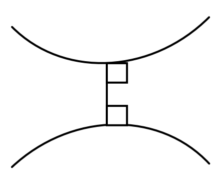
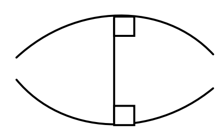
Nikolai Lobachevsky (1792–1856) - duke supozuar se postulati i pestë nuk është i saktë, në një punim i vendosi bazat e asaj që tash quhet **Gjeometri joeuklidiane**.

János Bolyai (1802–1860) - e zbuloi në mënyrë të pavarur Gjeometrinë joeuklidiane.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) - po ashtu pohoi se në mënyrë të pavarur kishte arritur tek Gjeometria joeuklidiane.

Eugenio Beltrami (1835–1900) - vërtetoi se Gjeometria joeuklidiane është konsistente sikurse ajo euklidiane. Prandaj, postulati i pestë nuk rridhte nga katër të parët.

Më saktësisht, gjeometria e mësipërme është **hiperbolike**. Një tjetër gjeometri joeuklidiane u zbulua nga Bernhard Riemann (1826–1866), që quhet **Gjeometri eliptike**.

Gjeometria euklidiane 	Gjeometria Hiperbolike 	Gjeometria eliptike 
Nëpër një pikë jashtë një drejtëze kalon saktësisht një drejtëz paralele me drejtëzën e dhënë.	Nëpër një pikë jashtë një drejtëze kalojnë pafund shumë drejtëza paralele me drejtëzën e dhënë.	Nëpër një pikë jashtë një drejtëze nuk kalon asnjë drejtëz paralele me drejtëzën e dhënë.

<u>Teoria e relativitetit</u>

Teoria e relativitetit është një shembull i jashtëzakonshëm i zbatimit të gjeometrisë joeuklidiane. Hapësira është e shtrembëruar dhe jo e drejtë.

<u>Sistem aksiomatik</u>

Gjeometri e incidencës
Terme bazike: "pika", "drejtëza", "i takon"
Po ashtu shtojmë: përmban, pritetn, paralele, kolineare, etj.

Aksioma 1. Çdo drejtëz përmban të paktën dy pika të ndryshme. Ekzistojnë tri pika jokolineare (që s'i takojnë të njëjtës drejtëz).
Aksioma 2. Për çdo dy pika të ndryshme ekziston një dhe vetëm një drejtëz që kalon nëpër ato dy pikë (është incidente me ato pika).
Aksioma 3. Për çdo tri pika të ndryshme jokolineare ekziston një dhe vetëm një rrafsh që kalon nëpër (është incident me) ato pika.
Aksioma 4. Çdo rrafsh përmban të paktën tri pika të ndryshme. Ekzistojnë katër pika jokoplanare (d.m.th. që nuk i takojnë të njëjtit rrafsh).
Aksioma 5. Çdo drejtëz që ka dy pika të përbashkëta me një rrafsh përmbahet në atë rrafsh.
Aksioma 6. Nëse dy rrafshe të ndryshme kanë një pikë të përbashkët atëherë ato kanë një drejtëz të përbashkët.

Detyrë. Duke u bazuar në aksiomat e mësipërme, vërtetoni se drejtëza dhe një pikë jashtë saj përcaktojnë një rrafsh të vetëm.

Detyrë 2. A mund t'i vërtetoni nga aksiomat pohimet vijuese:
i) Nëpër cilëndo pikë kalojnë të paktën dy drejtëza të ndryshme që e përmbajnë atë.

ii) Për cilëndo drejtëz, ekzistojnë të pakën dy pika të ndryshme që nuk janë incidente me të.